数　学

（解答番号 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{70}$）

「工学部」用問題

第１問

以下の問に答えよ。

（１）$\dfrac{1}{6-\sqrt{34}}$ の分母を有理化すると，

$$\frac{1}{6-\sqrt{34}}=\boxed{1}+\frac{\sqrt{\boxed{2\,\vdots\,3}}}{\boxed{4}}$$

である。したがって，$\dfrac{1}{6-\sqrt{34}}$ の整数部分を a，小数部分を b とすると，

$$a=\boxed{5},$$

$$b=\frac{\sqrt{\boxed{6\,\vdots\,7}}}{\boxed{8}}-\boxed{9}$$

である。このとき，

$$(a+2b+3)^2-(a-2b-5)^2=\boxed{10\,\vdots\,11}\sqrt{\boxed{12\,\vdots\,13}}$$

である。

（２）k を正の実数とする。次の２つの不等式を考える。

$$\sqrt{9x^2-24x+16}>5 \quad \cdots \quad ①$$

$$|x|\leqq k \quad \cdots \quad ②$$

$9x^2-24x+16=(\boxed{14}\,x-\boxed{15})^2$ であるため，①は

$$\sqrt{(\boxed{14}\,x-\boxed{15})^2}>5$$

と書き直せる。①と②を同時に満たす整数 x がちょうど２個あるとき，k は

$$\boxed{16}\leqq k<\boxed{17}$$

を満たす。また，①と②を同時に満たす整数 x がちょうど７個あるとき，k は

$$\boxed{18}\leqq k<\boxed{19}$$

を満たす。

第 2 問

以下の問に答えよ。

（1）180 を素因数分解すると

$$180 = 2^{\boxed{20}} \cdot \boxed{21}^{\boxed{22}} \cdot \boxed{23}$$

となる。

（2）$\dfrac{180}{n}$ が整数になるような 180 以下の自然数 n は $\boxed{24\,25}$ 個ある。

（3）$\dfrac{180}{n}$ が有限小数となるような 180 以下の自然数 n の中で，素因数が 2 だけのものは $\boxed{26}$ 個ある。なお，有限小数に整数は含まれない。

（4）$\dfrac{180}{n}$ が有限小数となるような 180 以下の自然数 n は $\boxed{27\,28}$ 個ある。

（5）$\dfrac{180}{n}$ が循環小数となるような 180 以下の自然数 n は $\boxed{29\,30\,31}$ 個ある。

第３問

不等式

$$\log_9 x^4 - 5\log_x 27 \leqq 7 \quad \cdots \text{①}$$

が成り立つような x の範囲を求める。

（１）不等式①において，x は対数の底であるから，$x > \boxed{32}$ かつ $x \neq \boxed{33}$ を満たさなければならない。また，

$$\log_9 x^4 = \boxed{34}\log_3 x,$$

$$\log_x 27 = \frac{\boxed{35}}{\log_3 x}$$

である。

（２）不等式①は，$\boxed{32} < x < \boxed{33}$ のとき，

$$\boxed{36}(\log_3 x)^2 - \boxed{37}\log_3 x - \boxed{38\,39} \geqq 0$$

$x > \boxed{33}$ のとき，

$$\boxed{36}(\log_3 x)^2 - \boxed{37}\log_3 x - \boxed{38\,39} \leqq 0$$

と変形できる。

（３）したがって，求める x の範囲は

$$\boxed{40} < x \leqq \frac{\sqrt{\boxed{41}}}{\boxed{42}},\quad \boxed{43} < x \leqq \boxed{44\,45\,46}$$

である。

第４問

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が n^3 に等しいとき，以下の問に答えよ。

（１）数列 $\{a_n\}$ の初項は $a_1 = \boxed{47}$, 第 2 項は $a_2 = \boxed{48}$, 第 3 項は $a_3 = \boxed{49 \vdots 50}$ である。

（２）数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n = \boxed{51}\,n^2 - \boxed{52}\,n + \boxed{53}$ であり，

第 100 項は $a_{100} = \boxed{54 \vdots 55 \vdots 56 \vdots 57 \vdots 58}$ となる。

（３）数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。すなわち，$n = 1$，2，3，… に対して

$b_n = a_{n+1} - a_n$ である。このとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = \boxed{59}\,n$ であり，第 100 項

は $b_{100} = \boxed{60 \vdots 61 \vdots 62}$ となる。

（４）一般項が $c_n = \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$ であるとして数列 $\{c_n\}$ を定義するとき，数列 c_n の初項は

$c_1 = \dfrac{\boxed{63}}{\boxed{64}}$，初項から第 100 項までの和は $\dfrac{\boxed{65 \vdots 66 \vdots 67}}{\boxed{68 \vdots 69 \vdots 70}}$ となる。

以上で問題は終わりです。