数　学

（解答番号 $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{70}$）

「工学部」用問題

第 1 問

△ ABC において，AB ＝ a － 1，BC ＝ a，CA ＝ a ＋ 1 とするとき，以下の問に答えよ。

（1） a ＝ 8 のとき，

$$\cos\angle \mathrm{ACB} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}},$$

$$\sin\angle \mathrm{ACB} = \frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{4}},$$

△ ABC の面積は $\boxed{5\,\vdots\,6}\sqrt{\boxed{7}}$ である。

（2） △ ABC が存在するための a の条件は，$a > \boxed{8}$ であり，

△ ABC が鋭角三角形になるための a の条件は，$a > \boxed{9}$ である。

（3） △ ABC の外接円の半径が a － 1 のとき，

$$a = \frac{\boxed{10} + \boxed{11}\sqrt{\boxed{12}}}{\boxed{13}}$$

である。

第 2 問

大小 2 つのさいころを同時に投げることを考える。

「大きいさいころについて，3 の目が出る」という事象を A,

「2 個のさいころの目の和が 5 である」という事象を B とする。

事象 A が起こる確率を $P(A)$ としてあらわし，同様に，事象 B が起こる確率を $P(B)$ とあらわす。

このとき，

$$P(A) = \frac{\boxed{14}}{\boxed{15}},\quad P(B) = \frac{\boxed{16}}{\boxed{17}}$$

である。また，事象 B の余事象を $\overline{B}$ とするとき，

$$P(\overline{B}) = \frac{\boxed{18}}{\boxed{19}}$$

である。

事象 A と B が同時に起こる確率は

$$P(A \cap B) = \frac{\boxed{20}}{\boxed{21}\boxed{22}}$$

であり，事象 A と $\overline{B}$ が同時に起こる確率は

$$P(A \cap \overline{B}) = \frac{\boxed{23}}{\boxed{24}\boxed{25}}$$

である。

事象 A が起こったとき，事象 $\overline{B}$ が起こる条件付き確率は

$$P_A(\overline{B}) = \frac{\boxed{26}}{\boxed{27}}$$

である。また，事象 A または $\overline{B}$ が起こる確率は

$$P(A \cup \overline{B}) = \frac{\boxed{28}\boxed{29}}{\boxed{30}\boxed{31}}$$

である。

第 3 問

i を虚数単位として，以下の問に答えよ。

（1） $x^3 = 1$ の解は,

$$\text{実数解}\ \boxed{32}\ \text{と虚数解}\ \frac{-\boxed{33} \pm \sqrt{\boxed{34}}\, i}{\boxed{35}}$$

である。

（2） $z^2 = i$ を満たす複素数 z は,

$$z = \pm\frac{\sqrt{\boxed{36}}}{\boxed{37}} \pm \frac{\sqrt{\boxed{38}}}{\boxed{39}}\, i \ \text{（複号同順）}$$

である。

（3） 等式 $(7-3i)x-(9-5i)y=1+3i$ を満たす実数 x, y は,

$$x = \boxed{40},\ \ y = \boxed{41}$$

である。

（4） $x^3-4x^2+ax+b=0$ が $2+3i$ を解にもつとき，実数の定数 a, b の値は,

$$a = \boxed{42}\,\boxed{43},\ \ b = \boxed{44}$$

である。このとき，他の解は,

$$\boxed{45}\ \text{と}\ \boxed{46} - \boxed{47}\, i$$

である。

第４問

a を定数とするとき，関数 $f(x)=x^4-4ax^3+2ax+1$ について，以下の問に答えよ。

（１）$f(x)$ の導関数は $f'(x)=\boxed{48}\,x^3-\boxed{49\,50}\,ax^2+\boxed{51}\,a$ である。

（２）$y=f(x)$ のグラフが x 軸と点 $\mathrm{Q}(-1,0)$ で交わるとき，$a=-\boxed{52}$ であり，このとき点 Q を通る $y=f(x)$ の接線の方程式は $y=\boxed{53}\,x+\boxed{54}$ である。

（３）$y=f(x)$ のグラフと y 軸との交点 P を通る $y=f(x)$ の接線は，$a=\boxed{55}$ のときを除いて $y=f(x)$ のグラフと点 P 以外の点で交わり，その交点の座標は

$\left(\boxed{56}\,a,\ \boxed{57}\,a^2+\boxed{58}\right)$ である。

（４）$f(x)$ が極大値をもつ条件は，方程式 $f'(x)=0$ が異なる $\boxed{59}$ つの実数解をもつことである。$f'(x)$ が極値をもつのは $x=\boxed{60}$ および $x=\boxed{61}\,a$ のときであるから（ただし $\boxed{60}\neq\boxed{61}\,a$），$f(x)$ が極大値をもつための a の条件は，

$f'\left(\boxed{60}\right)=\boxed{62}\,a$ と $f'\left(\boxed{61}\,a\right)=-2a\left(\boxed{63}\,a^2-\boxed{64}\right)$ の一方が正，

もう一方が負であること，すなわち，$a<-\dfrac{\boxed{65}}{\boxed{66}}\sqrt{\boxed{67}}$ または

$a>\dfrac{\boxed{68}}{\boxed{69}}\sqrt{\boxed{70}}$ を満たすことである。

以上で問題は終わりです。