数　学

（解答番号 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{73}$）

※数学は「バイオ環境学部」は選択。「工学部」は必須。

第１問

$a = \sqrt{5} + \sqrt{6}$，$b = \sqrt{5} - \sqrt{6}$ とする。このとき，以下の問に答えよ 。

（１）

$$\frac{2}{1+a} + \frac{2}{1-b} + \frac{3}{1+b} + \frac{3}{1-a}$$

を簡単にすると，$\boxed{1}$ になる。

（２）

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

を簡単にすると $-\boxed{2 \mid 3}$ になる。これを利用して，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

を計算すると，$\boxed{4 \mid 5 \mid 6}$ になる。同様に，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{b}{a}\right)^3$$

を計算すると $-\boxed{7 \mid 8 \mid 9 \mid 10 \mid 11}$ になる。

第 2 問

「K」「U」「A」「S」とそれぞれ書かれたカードと白紙のカードの計 5 枚が入った袋を 1 つずつ持った 4 人が輪になって座っている。それぞれが自分の袋の中から 1 枚のカードを無作為に取り出すとき，以下の問に答えよ。

（1）4 人全員が白紙のカードを取り出す確率は $\dfrac{\boxed{12}}{\boxed{13}\,\boxed{14}\,\boxed{15}}$ である。

（2）4 人が取り出した計 4 枚のカードが「K」「U」「A」「S」それぞれ 1 枚ずつになる場合の数は $\boxed{16}\,\boxed{17}$ 通りである。

（3）4 人が取り出した計 4 枚のカードが「K」「U」「A」「S」の順に反時計回りに並ぶ確率は $\dfrac{\boxed{18}}{\boxed{19}\,\boxed{20}\,\boxed{21}}$ である。

（4）白紙のカードを取り出した場合，「K」「U」「A」「S」のいずれかに自由に読み替えができるとする。このとき，4 人が取り出した計 4 枚のカードが「K」「U」「A」「S」の順に反時計回りに読める場合の数は，4 人全員が白紙のカードを取り出した場合を除くと $\boxed{22}\,\boxed{23}$ 通りである。

（5）白紙のカードを取り出した場合，代わりのカードを同じ袋の残りの 4 枚から無作為に取り出し直すとする。このとき, 4 人が取り出した白紙を除く計 4 枚のカードが「K」「U」「A」「S」それぞれ 1 枚ずつになる確率は $\dfrac{\boxed{24}}{\boxed{25}\,\boxed{26}}$ である。

第 3 問

関数 $f(x) = x^4 - 4(x - a)^2$ と $g(x) = -7ax - 4$ について，以下の問に答えよ。

（1）$f(x)$ の導関数は，$f'(x) = \boxed{27}\,x^3 - \boxed{28}\,x + \boxed{29}\,a$ である。

（2）$f(x)$ が $x = 1$ で極小値をもつとき，$a = \dfrac{\boxed{30}}{\boxed{31}}$ であり，$x = 1$ における極小値は $\boxed{32}$ である。また，$f(x)$ が $x = 2$ で極小値をもつとき，$a = -\boxed{33}$ であり，極小値は $-\boxed{34\ 35}$ である。

（3）$a = 0$ のとき，方程式 $f(x) = 0$ の解は小さい順に $x = -\boxed{36}$，$\boxed{37}$，$\boxed{38}$ であり，$y = f(x)$ は直線 $y = g(x)$ との共有点を 2 つもつ。その x 座標は $x = \pm\sqrt{\boxed{39}}$ であり，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ に囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{40\ 41}}{\boxed{42\ 43}}\sqrt{\boxed{44}}$ である。

（4）$a = 1$ のとき，$y = f(x)$ は直線 $y = g(x)$ との共有点を 2 つもつ。その x 座標は小さい順に $x = -\boxed{45}$，$\boxed{46}$ であり，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ に囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{47\ 48\ 49}}{\boxed{50\ 51}}$ である。

第 4 問

xy 平面上の 3 点を A$(1, 1)$, B$(-2, 5)$, C$(2, 4)$ とする。このとき，以下の問に答えよ。

（1）ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の大きさはそれぞれ $\boxed{52}$，$\sqrt{\boxed{53\,54}}$ であり，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の内積は $\boxed{55}$ である。

（2）線分 BC を 3 : 2 に内分する点を P とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \left(-\frac{\boxed{56}}{\boxed{57}},\ \frac{\boxed{58\,59}}{\boxed{60}} \right)$$

である。

（3）t を実数とするとき，$|t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ の最小値は $\dfrac{\boxed{61\,62}\sqrt{\boxed{63\,64}}}{\boxed{65\,66}}$ であり，

このとき $t = \dfrac{\boxed{67}}{\boxed{68\,69}}$ である。

（4）$|t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + k\overrightarrow{\mathrm{AC}}| > 2$ がすべての実数 t に対して成り立つような k の値の範囲は

$$k < -\frac{\boxed{70\,71}}{\boxed{72\,73}},\ \frac{\boxed{70\,71}}{\boxed{72\,73}} < k$$

である。

以上で問題は終わりです。