数　学

（解答番号 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{70}$ ）

「工学部」用問題

第１問

2 次方程式

$$3x^2 - 6\sqrt{5}\,x + c = 0$$

を考える。c は定数とし，2 つの解を α，β とするとき，次の問に答えよ。

（1）α と β は

$$\alpha + \beta = \boxed{1}\sqrt{\boxed{2}}$$

を満たす。さらに $\alpha\beta = -1$ であるとき，

$$c = -\boxed{3}$$

である。このとき 2 つの解は，

$$\sqrt{\boxed{4}} \pm \sqrt{\boxed{5}}$$

と求まる。

（2）重解 $\alpha = \beta$ であるとき，

$$c = \boxed{6\,\vdots\,7}$$

である。このときの解は，

$$\sqrt{\boxed{8}}$$

である。

（3）$\alpha < 0 < \beta$ を満たす c の範囲は

$$c < \boxed{9}$$

である。

第２問

$\triangle$ ABC において，$\angle$ ABC $= 75^\circ$，$\angle$ ACB $= 60^\circ$，BC $= 10$ とするとき，次の問に答えよ。

（１）$\angle$ BAC $= \boxed{10 \, 11}^\circ$ であり，

線分 AB の長さは

$$\boxed{12}\sqrt{\boxed{13}}$$

である。

（２）線分 AC の長さは，

$$\boxed{14}\left(\boxed{15}+\sqrt{\boxed{16}}\right)$$

である。

（３）cos75°の値は，

$$\frac{\sqrt{\boxed{17}}-\sqrt{\boxed{18}}}{\boxed{19}}$$

である。

（４）$\triangle$ ABC の内接円と辺 AC とが接する点を P とするとき，

$$\mathrm{CP} = \frac{\boxed{20}}{\boxed{21}}\left(\boxed{22}-\sqrt{\boxed{23}}+\sqrt{\boxed{24}}\right)$$

であり，内接円の半径は

$$\frac{\boxed{25}}{\boxed{26}}\left(\boxed{27}-\sqrt{\boxed{28}}+\sqrt{\boxed{29}}\right)$$

である。

第 3 問

p を正の実数とする。座標平面上において，$y = (x - 4)^3 + 64$ を曲線 C，$y = 3p^2x$ を直線 l とする。このとき、次の問に答えよ。

（1）任意の x における直線 l と曲線 C の y の値の差を表す関数として，

$f(x) = (x - 4)^3 - 3p^2x + 64$ を定義する。f の導関数 f' は

$$f'(x) = \boxed{30}\left(x - \boxed{31}\right)^2 - \boxed{32}\,p^2$$

である。$f'(x) = 0$ が成り立つのは $x = \boxed{33} \pm p$ のときであり，f の極小値は

$$-\boxed{34}\,p^3 - \boxed{35\,36}\,p^2 + \boxed{37\,38}$$

である。さらに，f の極小値が 0 になるのは $p = \boxed{39}$ のときである。

（2）直線 l と曲線 C はいかなる p においても常に座標 $\left(\boxed{40}, \boxed{41}\right)$ で交わる。

また，直線 l と曲線 C が接するのは，

$p = \boxed{42}$，$\boxed{43}$ のときである（$\boxed{42}$，$\boxed{43}$ は順不同）。

第 4 問

数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ で与えられるとき，次の問に答えよ。

（1）$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$，$y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ とおくと，$\{a_n\}$ の初項は $a_1 = x + y = \boxed{44}$ である。

（2）$xy = \boxed{45}$ であるので，$\{a_n\}$ の第 2 項は

$a_2 = x^2 + y^2 = (x+y)^{\boxed{46}} - \boxed{47}\,xy = \boxed{48}$，第 3 項は

$a_3 = x^3 + y^3 = (x+y)^{\boxed{49}} - \boxed{50}\,xy(x+y) = \boxed{51\,\vdots\,52}$ である。

（3）$(x^3+y^3)(x+y) = x^{\boxed{53}} + y^{\boxed{54}} + xy(x^{\boxed{55}} + y^{\boxed{56}})$ より，第 4 項は

$a_4 = \boxed{57}\,a_{\boxed{58}} - a_{\boxed{59}} = \boxed{60\,\vdots\,61}$ である。

（4）$n \geqq 3$ のとき $a_n = \boxed{57}\,a_{n-\boxed{62}} - a_{n-\boxed{63}}$ が成り立つので，第 5 項と第 6 項は

それぞれ $a_5 = \boxed{64\,\vdots\,65\,\vdots\,66}$，$a_6 = \boxed{67\,\vdots\,68\,\vdots\,69}$ である。

（5）$a_n > 2000$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{70}$ である。

以上で問題は終わりです。