【数学解説】

3　一般入試　経済経営学部・人文学部・健康医療学部

第１問

(1) $x \geqq -\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$

【解説】

$\dfrac{x+2}{3} \leqq \dfrac{4x+5}{6} \iff 2(x+2) \leqq 4x+5 \iff x \geqq -\dfrac{1}{2}$

(2) $-\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{7}} \leqq x \leqq \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{5}}$

【解説】

$\dfrac{1}{2}x+3 \leqq 4x+5$ から, $x \geqq -\dfrac{4}{7}$ ⋯① $4x+5 \leqq -6x+7$ から, $x \leqq \dfrac{1}{5}$ ⋯②

①,②より, $-\dfrac{4}{7} \leqq x \leqq \dfrac{1}{5}$

(3) $x \geqq \dfrac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$

【解説】

(i) $x \geqq 6$ のとき

不等式は, $\dfrac{1}{2}x-3 \leqq 4x$ 　これを解いて, $x \geqq -\dfrac{6}{7}$

$x \geqq 6$ との共通範囲は, 　$x \geqq 6$ ⋯ ③

(ii) $x < 6$ のとき

不等式は, $-\dfrac{1}{2}x+3 \leqq 4x$ 　これを解いて, $x \geqq \dfrac{2}{3}$

$x < 6$ との共通範囲は, 　$\dfrac{2}{3} \leqq x < 6$ ⋯ ④

求める解は, ③と④を合わせた範囲で, 　$x \geqq \dfrac{2}{3}$

(4) $k = \boxed{2}$

【解説】

$k \leqq \dfrac{x+2}{3} \iff x \geqq 3k-2$

題意より, $3k-2=4$ 　よって, $k=2$

(5) $k = -\dfrac{\boxed{7}}{\boxed{10}}$

【解説】

$-\dfrac{1}{2}x+3 \leqq kx+4 \iff (2k+1)x \geqq -2$

(i) $k > -\dfrac{1}{2}$ のとき, 　$x \geqq -\dfrac{2}{2k+1}$

(ii) $k = -\dfrac{1}{2}$ のとき, 　x は全ての実数

(iii) $k < -\dfrac{1}{2}$ のとき, 　$x \leqq -\dfrac{2}{2k+1}$

題意より, x の範囲は $x \leqq 5$ より, (iii) のときだけ満たす.

このとき, $-\dfrac{2}{2k+1} = 5$ より, 　$k = -\dfrac{7}{10}$

第２問

(1) $\cos\theta = \dfrac{\boxed{1}}{\sqrt{\boxed{6}}}$

【解説】

$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より, $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 6$ である。

したがって, $\cos^2\theta = \dfrac{1}{6}$ である。θ が鋭角であることから, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2 = \boxed{1} + \dfrac{\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{3}}$

【解説】

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より, $\sin^2\theta = 1-\dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$ 　したがって, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

よって,

$(\sin\theta+\cos\theta)^2 = 1+2\sin\theta\cos\theta = 1+2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}} = 1+\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

(3) $\cos\theta_1\cos\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{6}}$

【解説】

$\cos\theta_1 = \cos(180^\circ-\theta) = -\cos\theta,\ \cos\theta_2 = \cos(90^\circ-\theta) = \sin\theta$ より,

$\cos\theta_1\cos\theta_2 = -\cos\theta\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{5}}{6}$

(4) $\dfrac{\sin\theta_1\cos\theta_1+\sin\theta_2\cos\theta_2}{\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1} = \boxed{0}$

【解説】

$\sin\theta_1 = \sin(180^\circ-\theta) = \sin\theta,\ \ \sin\theta_2 = \sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta$ 　より

（分子）$= -\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta = 0$, 　よって（与式）$=0$

(5) $\tan^2\theta\tan^2\theta_1\tan^2\theta_2 = \boxed{5}$

【解説】

$\tan\theta_1 = \dfrac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} = \dfrac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta,\quad \tan\theta_2 = \dfrac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta}$

よって, （与式）$= \tan^2\theta\cdot\tan^2\theta\cdot\dfrac{1}{\tan^2\theta} = \tan^2\theta = 5$

第 3 問

(1) BM$=\dfrac{\boxed{5}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}}$

【解説】

三角形 BCD は正三角形であることより，余弦定理を用いると，

$\mathrm{BM}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CM}^2-2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CM}\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{75}{4}$　　よって，$\mathrm{BM}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

(2) AG$=\dfrac{\boxed{5}\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{3}}$

【解説】

点 G は三角形 BCD の重心であるから，点 G は線分 BM を 2 : 1 に内分する。

$\mathrm{BG}=\dfrac{2}{3}\mathrm{BM}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

また，点 G は点 A から三角形 BCD に下した垂線の足と一致するから，三平方の定理より

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{BG}^2+\mathrm{AG}^2 \Leftrightarrow \mathrm{AG}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{BG}^2=\dfrac{50}{3}$　　よって，$\mathrm{AG}=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$

(3) 正四面体の体積$=\dfrac{\boxed{125}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{12}}$

【解説】

体積 $\mathrm{V}_0=\dfrac{1}{3}\times\mathrm{AG}\times$ 三角形 BCD の面積 $=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5\sqrt{6}}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{125\sqrt{2}}{12}$

(4) 頂点 A から切り取られる正四面体の体積$=\dfrac{\boxed{125}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{768}}$

【解説】

切り取られる四面体は正四面体であり，正四面体 ABCD と相似（相似比 1 : 4）である。

切り取られる四面体の体積を V_A とすると，

$\mathrm{V}_A:\mathrm{V}_0=1^3:4^3 \Leftrightarrow \mathrm{V}_A=\dfrac{1}{64}\times\dfrac{125\sqrt{2}}{12}=\dfrac{125\sqrt{2}}{768}$

(5) 全ての頂点から四面体を除去した後の体積$=\dfrac{\boxed{625}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{64}}$

【解説】

4 つの頂点から四面体を除去するので，

$\dfrac{125\sqrt{2}}{12}-\dfrac{125\sqrt{2}}{768}\times4=\dfrac{625\sqrt{2}}{64}$

第 4 問

(1) 順に，平均値 $\boxed{5}$，$\boxed{6}$　分散 $\boxed{0}$. $\boxed{67}$，$\boxed{4}$. $\boxed{67}$

【解説】

x，y のデータの平均値をそれぞれ $\bar{x}$，$\bar{y}$ とすると，

$\bar{x}=\dfrac{1}{3}(4+6+5)=5$

$\bar{y}=\dfrac{1}{3}(9+4+5)=6$

x，y のデータの分散をそれぞれ s_x^2，s_y^2 とすると，

$s_x^2=\dfrac{1}{3}\left(4^2+6^2+5^2\right)-5^2=0.67$（小数第 3 位を四捨五入）

$s_y^2=\dfrac{1}{3}\left(9^2+4^2+5^2\right)-6^2=4.67$（小数第 3 位を四捨五入）

(2) 順に，$\bar{x}=\boxed{26}$，$\bar{y}=\boxed{20}$，①は $\boxed{16}$，②は $\boxed{4}$，③は $\boxed{9}$，相関係数 $=\boxed{0.65}$

【解説】

$\bar{x}=\dfrac{1}{5}(29+25+30+23+23)=26$

$\bar{y}=\dfrac{1}{5}(23+22+20+18+17)=20$

よって，次の表が得られる。

	x	y	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
1	29	23	9	9	③9
2	25	22	1	4	−2
3	30	20	①16	0	0
4	23	18	9	②4	6
5	23	17	9	9	9
計			44	26	22

ゆえに，相関係数 $r=\dfrac{22}{\sqrt{44\times26}}=0.65$（少数第 3 位を四捨五入）である。

4　一般入試　バイオ環境学部・工学部

第 1 問

(1) 順に, $\boxed{6}$, $\boxed{12}$, $\boxed{3}$, $\boxed{20}$, $\boxed{30}$

【解説】

正八面体

頂点の数は 6, 辺の数は 12

正十二面体

正十二面体の各面は正五角形で, 各頂点に集まる面の数は 3 である。

よって, 頂点の数は $5 \times 12 \div 3 = 20$, 辺の数は $5 \times 12 \div 2 = 30$ である。

(2) $\dfrac{\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{12}}a^3$

【解説】

立方体の 1 辺の長さは $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ になるので, 体積は

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) \times 4 = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

(3) $\boxed{3}\sqrt{\boxed{3}}$

【解説】

切断面は正六角形になり, 1 辺の長さは $\sqrt{2}$ なので,

正六角形を構成する 1 つの正三角形の面積は, $\dfrac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって, 求める面積はその 6 倍なので, $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$

第 2 問

(1) 順に, $\sin 2\theta = \dfrac{\boxed{24}}{\boxed{25}}$, $\tan 2\theta = -\dfrac{\boxed{24}}{\boxed{7}}$

【解説】

$0 < \theta < \pi$ より, $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \dfrac{4}{5}$

よって,

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{24}{25}$

また,

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \dfrac{18}{25} - 1 = -\dfrac{7}{25}$

よって, $\tan 2\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = -\dfrac{24}{25} \cdot \dfrac{25}{7} = -\dfrac{24}{7}$

(2) $\theta = \dfrac{\boxed{7}}{\boxed{6}}\pi$

【解説】

(左辺) $= 2\left(\dfrac{1}{2}\sin\theta - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) = 2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ と変形できる。

よって, 与えられた方程式は, $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ である。

$\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき, $\dfrac{2\pi}{3} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{5\pi}{3}$ であるから, $\theta - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6}$ よって, $\theta = \dfrac{7}{6}\pi$

(3) 順に, $-\boxed{1} \leqq x \leqq \sqrt{\boxed{2}}$, 最大値 $= \dfrac{\boxed{13}}{\boxed{4}}$, 最小値 $= \boxed{1}$

【解説】

$x = \sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right) = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ と変形できる。

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき, $-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3\pi}{4}$

このとき, $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ より, $-1 \leqq \sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$ $\cdots$①

また, $x = \sin\theta - \cos\theta$ より, $x^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta = 1 - \sin 2\theta$　ゆえに, $\sin 2\theta = 1 - x^2$

よって,

$y = \sin 2\theta - \cos\theta + \sin\theta + 2 = 1 - x^2 + x + 2 = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{13}{4}$ $\cdots$ ② より,

①の範囲で②は,

$x = \dfrac{1}{2}$ のとき, 最大値 $\dfrac{13}{4}$, $x = -1$ のとき, 最小値 1 をとる。

第 3 問

(1) 順に, $x = -\boxed{1} + \boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}$, $x = \dfrac{\boxed{7}}{\boxed{4}}$

【解説】

真数条件は, $x - 1 > 0$ より, $x > 1$

$\log_2(x-1) + \log_2(x+3) = 3 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 2^3$　したがって, $x = -1 \pm 2\sqrt{3}$

真数条件より, $x = -1 + 2\sqrt{3}$

また, 真数条件は, $x > 1$ であり, $\log_5(x+2) - \log_5(x-1) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x-1} = 5$ から

$x \fallingdotseq 1$ かつ $7 = 4x$ より, $x = \dfrac{7}{4}$

(2) $\boxed{14}$ 日目

【解説】

題意より, 2000(杯) $= 500 \times 2^{\frac{t}{7}}$ と表される。

$2000 = 500 \times 2^{\frac{t}{7}} \Leftrightarrow 2^2 = 2^{\frac{t}{7}}$　　よって, $t = 14$

(3) 小数第 $\boxed{8}$ 位

【解説】

$\left(\dfrac{5}{6}\right)^{100}$ の常用対数をとって, $100\left(\log_{10}5 - \log_{10}6\right)$

$\log_{10}5 = \log_{10}10 - \log_{10}2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$

$\log_{10}6 = \log_{10}2 + \log_{10}3 = 0.7781$

よって, $100\left(\log_{10}5 - \log_{10}6\right) = 100(0.6990 - 0.7781) = -7.91$

$-8 < -7.91 < -7$ から, 小数第 8 位に初めて 0 でない数が現れる。

(4) $\boxed{①}$

【解説】

① $\log_2 16 = 4$　② $\log_3 27 = 3$　③ $\log_4 64 = 3$　④ $\log_5 125 = 3$

⑤ $\log_6 216 = 3$　⑥ $\log_7 343 = 3$　⑦ $\log_8 512 = 3$　⑧ $\log_9 729 = 3$

⑨ $\log_{10} 1000 = 3$　⓪ $\log_{11} 1331 = 3$

第 4 問

(1) 順に, 初項 $a_1 = \boxed{12}$, 公比 $r = \boxed{2}$, 和 $= \boxed{3060}$

【解説】

$a_n = 3 \cdot 2^{n+1} = 3 \cdot 2^2 \cdot 2^{n-1} = 12 \cdot 2^{n-1} \cdots$ ①

①は数列 $\{a_n\}$ が,

初項 $a_1 = 12$, 公比 $r = 2$ の等比数列であることを表す。

第 8 項までの和 $S_8 = \dfrac{12(2^8 - 1)}{2 - 1} = 3060$

(2) 順に, 初項 $b_1 = \boxed{1} + \log_4 \boxed{3}$, 公差 $d = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$, 和 $= \boxed{22} + \boxed{8} \log_4 \boxed{3}$

【解説】

$b_n = \log_4 3 \cdot 2^{n+1} = \log_4 4^{\frac{(n+1)}{2}} + \log_4 3 = \dfrac{n+1}{2} + \log_4 3 \cdots$ ②

②より

数列 $\{b_n\}$ は, 初項, $b_1 = 1 + \log_4 3$, 公差 $d = \dfrac{1}{2}$, $b_8 = \dfrac{9}{2} + \log_4 3$

第 8 項までの和 $S_8 = \dfrac{8}{2}(b_1 + b_8) = 4 \cdot (1 + \log_4 3 + \dfrac{9}{2} + \log_4 3) = 22 + 8 \log_4 3$

(3) 順に, $\boxed{1} + \dfrac{\sqrt{\boxed{2}}}{2}$, $\boxed{4} + \dfrac{\sqrt{\boxed{2}}}{2}$

【解説】

$c_1 = \sin \dfrac{3 \cdot 2^{(1+1)}}{48}\pi = \sin \dfrac{1}{4}\pi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$c_2 = \sin \dfrac{3 \cdot 2^{(2+1)}}{48}\pi = \sin \dfrac{1}{2}\pi = 1$

$c_3 = \sin \dfrac{3 \cdot 2^{(3+1)}}{48}\pi = \sin \pi = 0$

$c_4 = \sin \dfrac{3 \cdot 2^{(4+1)}}{48}\pi = \sin 2\pi = 0$

c_3 以降の項は 0 であることが分かる。　よって, $S_8 = c_1 + c_2 = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

同様にして,

$d_1 = \cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $d_2 = \cos \dfrac{\pi}{2} = 0$. $d_3 = \cos \pi = -1$, $d_4 = \cos 2\pi = 1 \cdots$

よって, $S_8 = d_1 + \cdots + d_8 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 0 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $e_n = \boxed{6} \cdot \boxed{2}^{\,n} - \boxed{9}$

【解説】

$n \geqq 2$ のとき,

$e_n = e_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 3 + \dfrac{12(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 6 \cdot 2^n - 9 \cdots$ ③

③に $n = 1$ を代入して, $6 \cdot 2 - 9 = 3 = e_1$　よって, $e_n = 6 \cdot 2^n - 9$