【数学解説】

1　公募推薦入試　健康医療学部・バイオ環境学部

第 1 問

(1) $a = \boxed{3}$, $b = \boxed{16}$

【解説】

$y = x^2 + ax + b$ を y 軸に関して対称移動すると, $y = x^2 - ax + b$ $\cdots$① となる。

①をさらに x 軸方向に -20, y 軸方向に 24 だけ平行移動すると,

$y - 24 = (x+20)^2 - a(x+20) + b$

$\Leftrightarrow y = x^2 + (40-a)x + 424 - 20a + b$ $\cdots$②

②と $y = x^2 + 37x + 380$ の係数を比較して, $a = 3$, $b = 16$

(2) $y = -\boxed{2}\,x^2 - \boxed{6}\,x - \boxed{5}$

【解説】

求める 2 次関数は $y = a\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}$ $\cdots$③ と表される。

③が点 $(0,\ -5)$ を通るので, $-5 = a\left(0 + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}$　　ゆえに $a = -2$

よって, $y = -2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} = -2x^2 - 6x - 5$

(3) 線分の長さ $= \dfrac{\sqrt{\boxed{41}}}{\boxed{2}}$

【解説】

与えられた 2 次関数と x 軸との交点の x 座標は,

$-2x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 4 = 0$　　ゆえに $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$

よって, 放物線が x 軸から切り取る線分の長さは, $\dfrac{\sqrt{41}}{2}$ となる。

第 2 問

(1) 平均値 $= \boxed{2}\,.\,\boxed{1}$

【解説】

コーヒー消費量 × 度数の合計 $= 0 \times 7 + 1 \times 25 + 2 \times 35 + 3 \times 20 + 4 \times 10 + 5 \times 3 = 210$

よって, 平均値 $= \dfrac{210}{100} = 2.1$

(2) 中央値 $= \boxed{2}$, 最頻値 $= \boxed{2}$

【解説】

中央値:50 番目のデータがある度数が 2 より, 中央値 $= 2$

最頻値: 度数分布表より, 最も度数が大きいのは 35 より, 最頻値 $= 2$

(3) 第 1 四分位数 $= \boxed{1}$, 第 3 四分位数 $= \boxed{3}$, 四分位範囲 $= \boxed{2}$

【解説】

小さい方から 25 番目のデータが存在する階級は 1(杯) より, 第 1 四分位数 $= 1$

大きい方から 25 番目のデータが存在する階級は 3(杯) より, 第 3 四分位数 $= 3$

四分位範囲 $= 3 - 1 = 2$

(4) 分散 $= \boxed{1}\,.\,\boxed{39}$

【解説】

分散 $s^2 = (x^2$ のデータの平均値 $) - (x$ のデータの平均値 $)^2$ より,

$(x^2$ のデータの平均値 $) =$

$\dfrac{1}{100}\left(0^2 \times 7 + 1^2 \times 25 + 2^2 \times 35 + 3^2 \times 20 + 4^2 \times 10 + 5^2 \times 3\right) = \dfrac{580}{100} = 5.8$

平均値は (1) の結果より 2.1　　よって, 分散 $s^2 = 5.8 - 2.1^2 = 1.39$

(5) 共分散 $= \boxed{10}$

【解説】

年齢 x の平均 $\bar{x} = \dfrac{1}{5}(25 + 30 + 35 + 40 + 45) = 35$

消費量 y の平均 $\bar{y} = \dfrac{1}{5}(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3$

よって, 次の表が得られる。

x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
25	1	-10	-2	20
30	2	-5	-1	5
35	3	0	0	0
40	4	5	1	5
45	5	10	2	20

したがって, 共分散 $s_{xy} = \dfrac{1}{5}(20 + 5 + 0 + 5 + 20) = 10$

第 3 問

(1) 順に $\boxed{360}$ 通り, $\boxed{240}$ 通り

【解説】

N を 2 つ含む順列であるから, $\dfrac{6!}{2!} = 360$（通り）

N が隣合う場合の並べ方は, N2 つを 1 つと考えて, $5! = 120$（通り）

したがって, $360 - 120 = 240$（通り）

(2) $\boxed{13}$ 通り

【解説】

玉の選び方は, (A) 全部白（または黒）, (B) 5 つ白で 1 つ黒（5 つ黒で 1 つ白）, (C) 4 つ白で 2 つ黒（4 つ黒で 2 つ白）, (D) 3 つ白で 3 つ黒の 4 パターンがあり得る。

(A) 全部白（または黒）の場合

(i) ○○○○○○

の 1 通りしかないため, $1 \times 2 = 2$（通り）

(B) 5 つ白で 1 つ黒（5 つ黒で 1 つ白）の場合

(i) ●○○○○○

の 1 通りしかないため, $1 \times 2 = 2$（通り）

(C) 4 つ白で 2 つ黒（4 つ黒で 2 つ白）の場合

(i) ●●○○○○

(ii) ●○●○○○

(iii) ●○○●○○

の 3 通りがあるので, $3 \times 2 = 6$（通り）

(D) 3 つ白で 3 つ黒の場合

(i) ●●●○○○

(ii) ●○●●○○

(iii) ●○●○●○

の 3 通りである．3（通り）

以上より, 数珠の全ての作り方は, $2 + 2 + 6 + 3 = 13$（通り）

(3) 順に $\boxed{90}$ 通り, $\boxed{15}$ 通り

【解説】

6 人の学生を名前付きの 2 人のペアに分ける組み合わせは,

${}_6C_2 \times {}_4C_2 = 90$（通り）である。

また, 名前のない 2 人のペアに分ける場合は, 同じものが 3!（通り）できるため,

$90 \div 3! = 15$（通り）である。

(4) $\boxed{44}$ 通り

【解説】

3 つの数字を選んで, 234 以上の 3 桁の数字を作る場合, (A) 百の位が 2 で, 十の位が 3 であり, 一の位が 4 か 5 の場合 (B) 百の位が 2 で, 十の位が 4 以上の場合 (C) 百の位が 3 より大きい場合の 3 パターンがあり得る。

(A) の場合のそれぞれの位の選び方は

$1 \times 1 \times {}_2C_1 = 2$（通り）

(B) の場合のそれぞれの位の選び方は

$1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 = 6$（通り）

(C) の場合のそれぞれの位の選び方は

${}_3C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 36$（通り）

以上より, 234 以上の 3 桁の数字を作る総数は, $2 + 6 + 36 = 44$（通り）

第 4 問

(1) BE= $\boxed{6}$, ED= $\boxed{4}$

【解説】

線分 AE は $\angle$BAD の二等分線であるので, BE : ED = AB : AD = 12 : 8 = 3 : 2

したがって,　BE= $\frac{3}{5}$BD= 6, ED= $\frac{2}{5}$BD= 4

(2) AE·EC= $\boxed{24}$

【解説】

方べきの定理より, AE·EC=BE·ED である, (1) の結果より,

AE·EC=BE·ED= $6 \times 4 = 24$

(3) $\triangle$ABD の面積 = $\boxed{48}$ $\sin$ $\boxed{2}$ θ

【解説】

$\triangle$ABD の面積 $= \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{DA} \times \sin 2\theta = 48 \sin 2\theta$

(4) AE $= \boxed{6}\sqrt{\boxed{2}}$, EC $= \boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}$

【解説】

AE=x とし, $\triangle$ABE に対して余弦定理を用いると

$\mathrm{BE}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AE}^2 - 2\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AE} \cos\theta$

$\Leftrightarrow\ 36 = 144 + x^2 - 24x\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{x^2 + 108}{24x} \cdots$①

同様に, $\triangle$AED に対して余弦定理を用いると

$\mathrm{DE}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{AE}^2 - 2\mathrm{AD} \cdot \mathrm{AE} \cos\theta$

$\Leftrightarrow\ 16 = 64 + x^2 - 16x\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{x^2 + 48}{16x} \cdots$②

①②より, $x = \pm 6\sqrt{2}$　$x > 0$ より, $x = 6\sqrt{2}$

また, (2) より, $\mathrm{AE} \cdot \mathrm{EC} = 24$ より, $\mathrm{EC} = 2\sqrt{2}$

(5) BC·CD= $\boxed{32}$

【解説】

$\triangle\mathrm{ABD} : \triangle\mathrm{BCD} = \mathrm{AE} : \mathrm{EC}$ より

$48\sin 2\theta : \left\{\frac{1}{2} \cdot \mathrm{BC} \cdot \mathrm{CD} \cdot \sin(180^\circ - 2\theta)\right\} = 96 : (\mathrm{BC} \cdot \mathrm{CD}) = \mathrm{AE} : \mathrm{EC}$

(4) より, $\mathrm{AE} = 6\sqrt{2},\ \mathrm{EC} = 2\sqrt{2}$ であるので,

$96 : (\mathrm{BC} \cdot \mathrm{CD}) = 3 : 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{BC} \cdot \mathrm{CD} = 32$

2　公募推薦入試　工学部

第1問・第2問 健康医療学部・バイオ環境学部と同じ

第3問

(1) 順に, y $\boxed{④ \leqq}$ $\boxed{1}\,x + \boxed{4}$,　y $\boxed{④ \leqq}$ $-\boxed{2}\,x + \boxed{10}$,　y $\boxed{③ \geqq}$ $-\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\,x + \dfrac{\boxed{5}}{\boxed{2}}$

【解説】

点 A$(-1,\ 3)$, B$(2,\ 6)$ を通る直線の方程式は　$y = x + 4 \cdots ①$

点 B$(2,\ 6)$, C$(5,\ 0)$ を通る直線の方程式は　$y = -2x + 10 \cdots ②$

点 A$(-1,\ 3)$, C$(5,\ 0)$ を通る直線の方程式は　$y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2} \cdots ③$

領域 D は直線①〜③で作られる △ABC の内側であるから,

$y \leqq x + 4,\ y \leqq -2x + 10,\ y \geqq -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$

(2) 最大値 $\boxed{8}$, 最小値 $\boxed{2}$

【解説】

$x + y = k$ とすると, $y = -x + k \cdots ④$ となる. これは, 傾きが -1 で y 切片が k の直線の方程式であるから

k が最大となるのは, ④が点 B$(2,\ 6)$ を通るとき, 最大値 $k = 8$

k が最小となるのは, ④が点 A$(-1,\ 3)$ を通るとき, 最小値 $k = 2$

(3) 最大値 $\boxed{40}$, 最小値 $\boxed{5}$

【解説】

$x^2 + y^2 = k \cdots ⑤$ とすると,

k は原点 $(0, 0)$ を中心とする, 円の半径の 2 乗である。

最大となるのは,

⑤が点 B$(2,\ 6)$ を通るときなので,

最大値 $2^2 + 6^2 = 40$

最小となるのは.

⑤が直線 AC に接するときである.

原点を通り, 直線 AC と直交する直線は $y = 2x$ であり,

この直線が直線 AC と交わる点 $(1,\ 2)$ が接点であるから

最小値 $1^2 + 2^2 = 5$

第4問

(1) 内積 $= -\boxed{2}$

【解説】

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (2,\ 4)$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (3,\ -2)$ より, $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 6 - 8 = -2$

(2) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{\boxed{65}}}{\boxed{65}}$

【解説】

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right| = 2\sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \sqrt{13}$ より, $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|} = \dfrac{-2}{2\sqrt{65}} = -\dfrac{\sqrt{65}}{65}$

(3) 座標 D$(\boxed{6},\ \boxed{2})$

【解説】

点 D の座標を $(a,\ b)$ とすると, $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$

よって, $(2,\ 4) = (a - 4,\ b + 2)$

ゆえに, $2 = a - 4,\ 4 = b + 2$　　$a = 6,\ b = 2$　　D$(6.\ 2)$

(4) 面積 $\boxed{16}$

【解説】

(2) の結果を $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入して, $\sin\theta = \dfrac{8}{\sqrt{65}}$

平行四辺形 ABCD 面積 $= \left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\sin\theta = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{13} \cdot \dfrac{8}{\sqrt{65}} = 16$

(5) $\boxed{3}$: 1

【解説】

点 E は辺 AD を $2:1$ に内分する点だから, E の座標は $\left(5,\ \dfrac{8}{3}\right)$

直線 BE の方程式は, $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}$, また, 直線 CD は $y = 2x - 10$ である。

条件より, 直線 BE と CD の交点が F であるので, F の座標は $(7,\ 4)$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (6,\ 2) - (4,\ -2) = (2,\ 4)$. $\overrightarrow{\mathrm{CF}} = (7,\ 4) - (4,\ -2) = (3,\ 6)$

$\overrightarrow{\mathrm{CF}} = k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ なる実数 k が存在し, $k = \dfrac{3}{2}$

すなわち, $\overrightarrow{\mathrm{CF}} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$　これは, 点 F が辺 CD を $3:1$ に外分することを表す。